

## СИНТЕЗ СТРУКТУРНЫХ МОДИФИКАЦИЙ МЕХАНИЗМА БЕННЕТТА\*



Мунир Гумерович Яруллин, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Машиноведение и инженерная графика» Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ) Россия, Казань  
E-mail: [Yarulnimg@yahoo.com](mailto:Yarulnimg@yahoo.com)



Марат Ринатович Мингазов аспирант кафедры «Машиноведение и инженерная графика» Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ) Россия, Казань  
Тел.: 9047679519, E-mail: [MaratMingazovR@gmail.com](mailto:MaratMingazovR@gmail.com)

### Аннотация

В статье представлены 32 модификации механизма Беннетта в зависимости от ориентации осей шарниров его звеньев в различных квадрантах пространства. Для каждой модификации определен тип механизма: параллелограмм или антипараллелограмм Беннетта. По результатам системного анализа исследований установлено, что если в механизме Беннетта углы скрещивания осей шарниров находятся в смежных квадрантах, то такой механизм будет являться параллелограммом Беннетта вне зависимости от того, какое звено зафиксировано. Если углы скрещивания осей шарниров находятся в одной квадранте или в накрест лежащих квадрантах, то такой механизм будет являться антипараллелограммом Беннетта.

*Ключевые слова:* пространственные механизмы, шарнир, звено, вращательная пара, структура, подвижность механизма, скрещивающиеся оси, кривошип, шатун.

Механизм Беннетта – пространственный шарнирный четырехзвенник, впервые описанный английским математиком Беннеттом в 1903 году [9]. Изучением механизма занимались многие авторы [1-8]. Зависимость вращения ведомого звена по отношению к ведущему звену описана в работах [4, 9-10]. Хотя пространственный шарнирный четырехзвенный (4R) механизм является одним из самых простых

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-97090\14).

пространственных механизмов, способных передавать вращательное движение из одной плоскости в другую, на практике он пока не находит широкого применения. Механизм содержит всего четыре звена, связанных четырьмя вращательными парами (рис. 1). Его считают «парадоксальным» из-за того, что, согласно известной формуле Сомова-Малышева, механизм имеет подвижность равной минус двум, то есть конструкция должна быть якобы неподвижной.

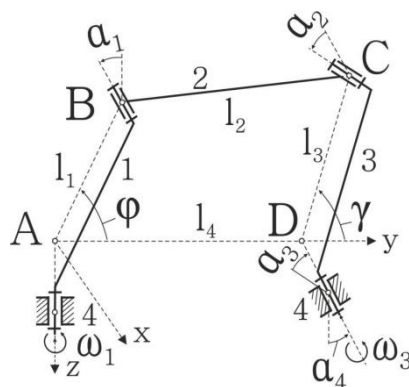


Рис. 1. Структурная схема пространственного 4R механизма

На практике механизм Беннетта подвижен, и его подвижность обусловлена дополнительными условиями, которые накладываются на механизм:

- 1) длины кратчайших расстояний противоположащих звеньев равны:

$$l_1 = l_3, \quad l_2 = l_4, \quad (1)$$

где:

$l_1$  – длина кратчайшего расстояния ведущего кривошипа,

$l_3$  – длина кратчайшего расстояния ведомого кривошипа.

$l_2$  – длина кратчайшего расстояния шатуна,

$l_4$  – длина кратчайшего расстояния стойки.

- 2) геометрические оси противоположных кинематических пар развернуты относительно друг друга на равные углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ :

$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_4, \quad (2)$$

где:

$\alpha_1$  – угол скрещивания осей шарниров ведущего кривошипа,

$\alpha_3$  – угол скрещивания осей шарниров ведомого кривошипа,

$\alpha_2$  – угол скрещивания осей шарниров шатуна,

$\alpha_4$  – угол скрещивания осей шарниров стойки.

- 3) концы кратчайших расстояний звеньев совпадают,

- 4) выполняется равенство:

$$\frac{l_1}{l_2} = \pm \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}. \quad (3)$$

Наличие знака  $\pm$  в уравнении (3) указывает на то, что у механизма Беннетта могут быть различные модификации в зависимости от сочетаний значения угла скрещивания геометрических осей кинематических пар соседних звеньев.

В нашей предыдущей работе [7] представлен краткий анализ модификаций пространственного 4R механизма. Данный доклад является её продолжением и посвящена определению 32 модификаций механизма Беннетта в зависимости от ориентации осей шарниров его звеньев в различных квадрантах пространства. Для каждой модификации будет определен тип механизма (параллелограмм или антипараллелограмм Беннетта), а также зависимость вращения ведомого звена по отношению к ведущему.

### Модификации пространственного 4R механизма

Согласно тригонометрическим формулам приведения имеем:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha), \quad (4)$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha), \quad (5)$$

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha), \quad (6)$$

На основании формул 4, 5, 6 уравнение 3 можно представить следующим образом:

$$1) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}, \quad (7)$$

$$2) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\pi - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2'}, \quad (8)$$

$$3) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\pi + \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2''}, \quad (9)$$

$$4) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(2\pi - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2'''}, \quad (10)$$

$$5) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(\pi - \alpha_1)}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1'}{\sin \alpha_2}, \quad (11)$$

$$6) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(\pi - \alpha_1)}{\sin(\pi - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1'}{\sin \alpha_2'}, \quad (12)$$

$$7) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(\pi - \alpha_1)}{\sin(\pi + \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1'}{\sin \alpha_2''}, \quad (13)$$

$$8) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(\pi - \alpha_1)}{\sin(2\pi - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1'}{\sin \alpha_2'''}, \quad (14)$$

$$9) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(\pi + \alpha_1)}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1''}{\sin \alpha_2}, \quad (15)$$

$$10) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(\pi + \alpha_1)}{\sin(\pi - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1''}{\sin \alpha_2'}, \quad (16)$$

$$11) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(\pi + \alpha_1)}{\sin(\pi + \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1''}{\sin \alpha_2''}, \quad (17)$$

$$12) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(\pi + \alpha_1)}{\sin(2\pi - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1''}{\sin \alpha_2'''}, \quad (18)$$

$$13) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(2\pi - \alpha_1)}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1''}{\sin \alpha_2}, \quad (19)$$

$$14) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(2\pi - \alpha_1)}{\sin(\pi - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1''}{\sin \alpha_2'}, \quad (20)$$

$$15) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(2\pi - \alpha_1)}{\sin(\pi + \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1''}{\sin \alpha_2''}, \quad (21)$$

$$16) \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(2\pi - \alpha_1)}{\sin(2\pi - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1''}{\sin \alpha_2''}, \quad (22)$$

На основании формул с (7) по (22) построена схема расположения углов скрещивания шарниров (рис. 2).

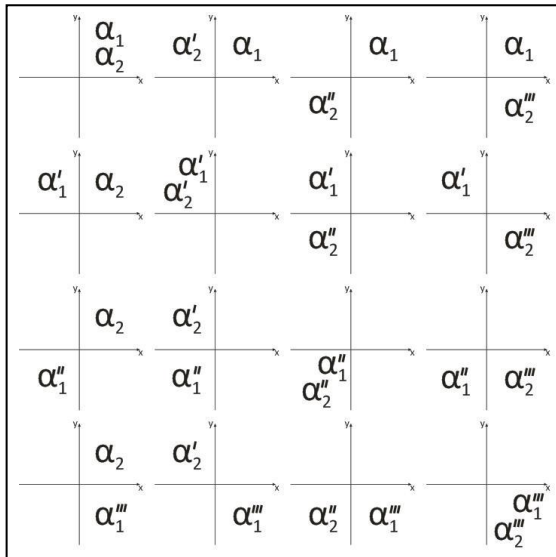


Рис. 2. Схема расположения углов скрещивания осей шарниров

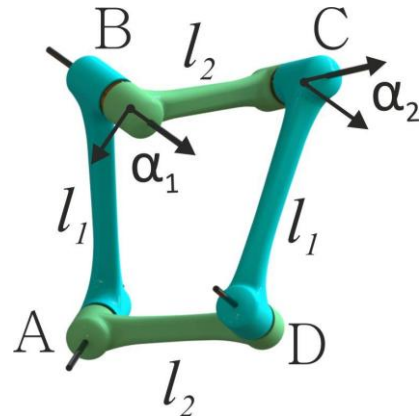


Рис. 3. Пространственный четырехзвенный механизм  $l_1 > l_2$

Возьмем пространственный шарнирный четырехзвенный механизм со структурными параметрами  $l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2$  (рис. 3), причем  $0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ, 0^\circ < \alpha_2 < 90^\circ, l_1 > l_2$ . Располагая углы скрещивания осей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в различных квадрантах (рис. 3), получим 16 модификаций пространственного механизма (табл. 1). В представленных модификациях пространственных 4R механизмов угол поворота  $j$  ведомого звена не пропорционален углу поворота  $\varphi$  ведущего звена и вычисляется по одной из представленных формул:

$$\sin \gamma = \frac{\sin(\varphi) \cdot K_3}{K_1 - \cos(\varphi) \cdot K_2} \quad (23)$$

$$\cos \gamma = \frac{K_1 \cdot \cos(\varphi) - K_2}{K_1 - \cos(\varphi) \cdot K_2} \quad (24)$$

где:

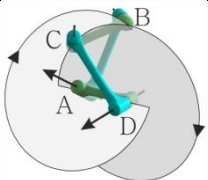
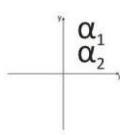
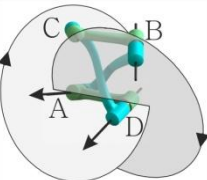
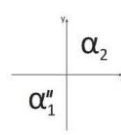
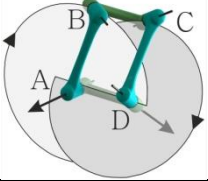
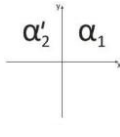
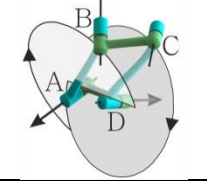
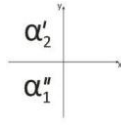
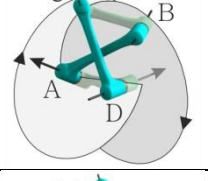
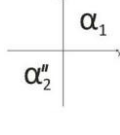
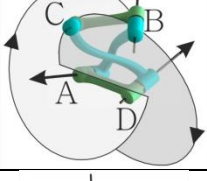
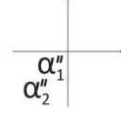
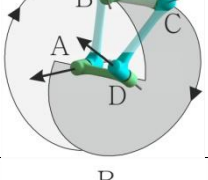
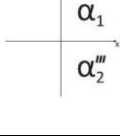
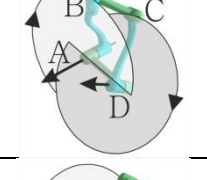
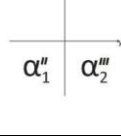
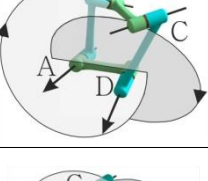
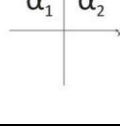
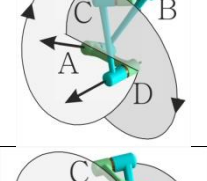
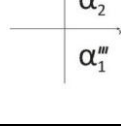
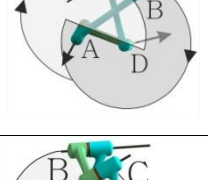
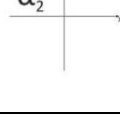
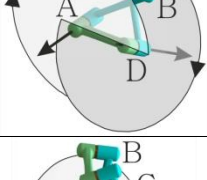
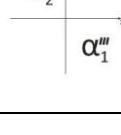
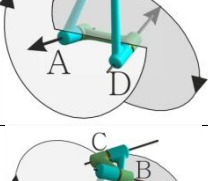
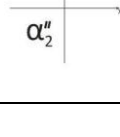
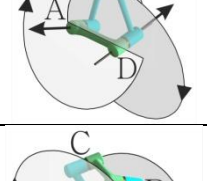
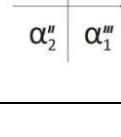
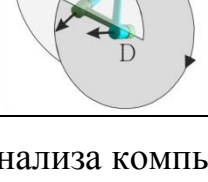
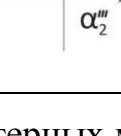

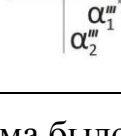
$$K_1 = l_2^2 \cdot \cos(\alpha_1) + l_1^2 \cdot \cos(\alpha_2), \quad (25)$$

$$K_2 = l_1 \cdot l_2 \cdot (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)), \quad (26)$$

$$K_3 = l_2^2 - l_1^2. \quad (27)$$

Таблица 1

Модификации механизма Беннетта при  $l_1(const) > l_2(const)$ 

№	параметры	3D модель	Схема	№	параметры	3D модель	Схема
1	$\alpha_1=60^\circ$ $\alpha_2=30^\circ$			9	$\alpha_1=240^\circ$ $\alpha_2=30^\circ$		
2	$\alpha_1=60^\circ$ $\alpha_2=150^\circ$			10	$\alpha_1=240^\circ$ $\alpha_2=150^\circ$		
3	$\alpha_1=60^\circ$ $\alpha_2=210^\circ$			11	$\alpha_1=240^\circ$ $\alpha_2=210^\circ$		
4	$\alpha_1=60^\circ$ $\alpha_2=330^\circ$			12	$\alpha_1=240^\circ$ $\alpha_2=330^\circ$		
5	$\alpha_1=120^\circ$ $\alpha_2=30^\circ$			13	$\alpha_1=300^\circ$ $\alpha_2=30^\circ$		
6	$\alpha_1=120^\circ$ $\alpha_2=150^\circ$			14	$\alpha_1=300^\circ$ $\alpha_2=150^\circ$		
7	$\alpha_1=120^\circ$ $\alpha_2=210^\circ$			15	$\alpha_1=300^\circ$ $\alpha_2=210^\circ$		
8	$\alpha_1=120^\circ$ $\alpha_2=330^\circ$			16	$\alpha_1=300^\circ$ $\alpha_2=330^\circ$		

В ходе анализа компьютерных моделей модификаций механизма было установлено, что если углы скрещивания осей шарниров лежат в смежных

квадрантах, то по своей структуре такой механизм является параллелограммом Беннетта (рис. 4, а). Если углы скрещивания осей находятся либо в одной, либо в накрест лежащих квадрантах, то такой механизм по своей структуре является антипараллелограммом Беннетта (рис. 4, б).

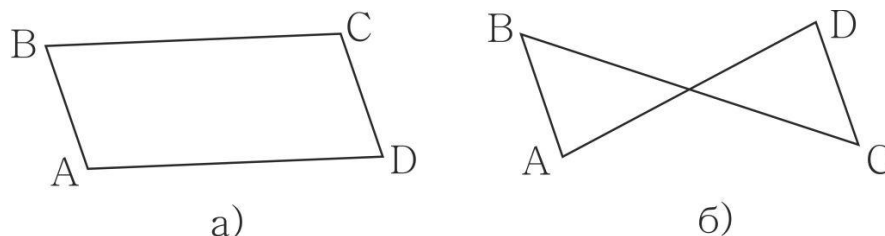


Рис. 4. Структура а - параллелограмм, б – антипараллелограмм

Если угол скрещивания осей  $\alpha_2$  стойки находится на интервале  $[-90^\circ \dots 90^\circ]$ , то вращение ведомого и ведущего звеньев происходит в одном направлении по отношению к ходу часовой стрелки (рис. 5, а). Если угол скрещивания осей  $\alpha_2$  стойки находится на интервале  $[90^\circ \dots 270^\circ]$ , то вращение ведомого и ведущего звеньев происходит в разных направлениях по отношению к ходу часовой стрелки (рис. 5, б).

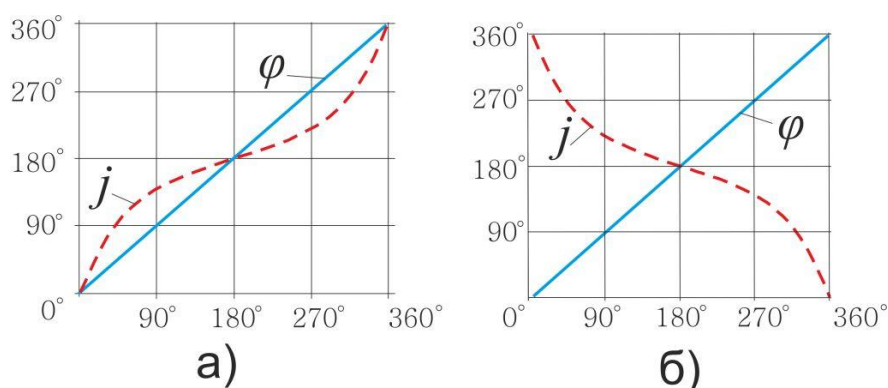


Рис. 5. Вращение ведомого и ведущего звеньев  
а – в одном направлении, б – в разных направлениях

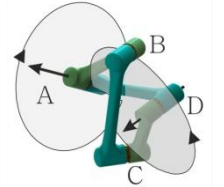
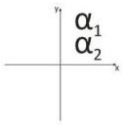
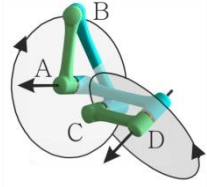
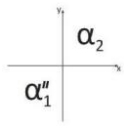
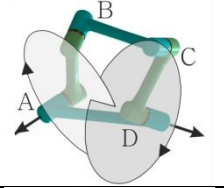
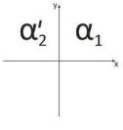
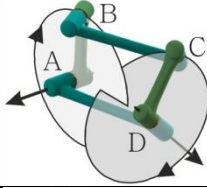
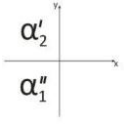
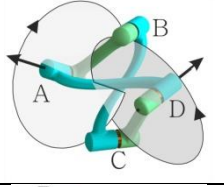
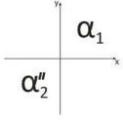
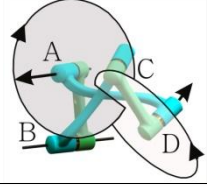
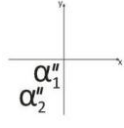
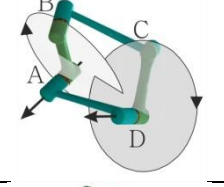
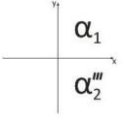
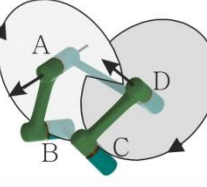
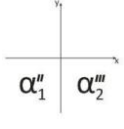
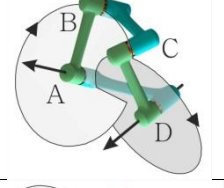
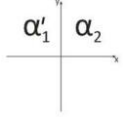
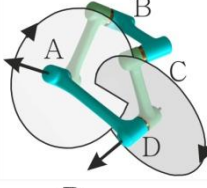
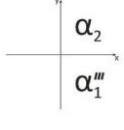
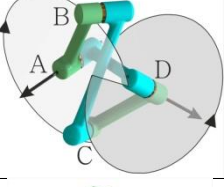
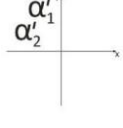
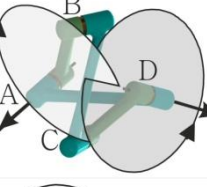
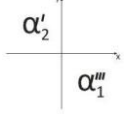
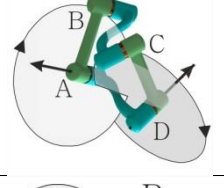
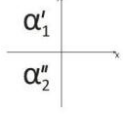
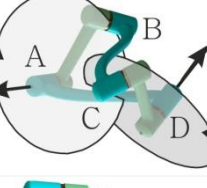
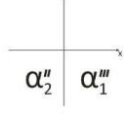
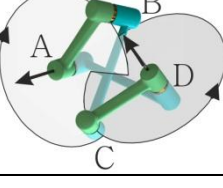
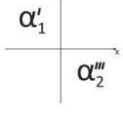
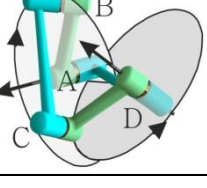
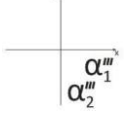
Возьмем пространственный шарнирный четырехзвенный механизм со структурными параметрами  $l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2$ , причем  $0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ, 0^\circ < \alpha_2 < 90^\circ, l_1 < l_2$ . Располагая углы скрещивания осей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в различных квадрантах, получим еще 16 модификаций пространственного механизма (табл. 2).

Анализируя 16 модификации механизма Беннетта (табл. 2), выявлены следующие закономерности по структуре механизма:

- 1) если в механизме Беннетта оба угла скрещивания осей шарниров лежат в одной квадранте, то полученный механизм является антипараллелограммом Беннетта;
- 2) если углы находятся в смежных квадрантах, то полученный механизм является параллелограммом Беннетта;
- 3) если углы расположены в накрест лежащих квадрантах, то полученный механизм – антипараллелограмм Беннетта.

Таблица 2

Модификации механизма Беннетта при  $l_1(const) < l_2(const)$ 

№	параметры	3D модель	Схема	№	параметры	3D модель	Схема
1	$\alpha_1=30^\circ$ $\alpha_2=60^\circ$			9	$\alpha_1=210^\circ$ $\alpha_2=60^\circ$		
2	$\alpha_1=30^\circ$ $\alpha_2=120^\circ$			10	$\alpha_1=210^\circ$ $\alpha_2=120^\circ$		
3	$\alpha_1=30^\circ$ $\alpha_2=240^\circ$			11	$\alpha_1=210^\circ$ $\alpha_2=240^\circ$		
4	$\alpha_1=30^\circ$ $\alpha_2=300^\circ$			12	$\alpha_1=210^\circ$ $\alpha_2=300^\circ$		
5	$\alpha_1=150^\circ$ $\alpha_2=60^\circ$			13	$\alpha_1=330^\circ$ $\alpha_2=60^\circ$		
6	$\alpha_1=150^\circ$ $\alpha_2=120^\circ$			14	$\alpha_1=330^\circ$ $\alpha_2=120^\circ$		
7	$\alpha_1=150^\circ$ $\alpha_2=240^\circ$			15	$\alpha_1=330^\circ$ $\alpha_2=240^\circ$		
8	$\alpha_1=150^\circ$ $\alpha_2=300^\circ$			16	$\alpha_1=330^\circ$ $\alpha_2=300^\circ$		

Для проверки проворачиваемости звеньев модификаций механизмов

были изготовлены несколько действующих моделей методом 3D печати (рис. 6).



Рис. 6. Действующие модели модификаций 4R механизмов

### Общие выводы

1. Если в механизме Беннетта углы скрещивания осей шарниров находятся в смежных квадрантах, то такой механизм по своей структуре будет являться параллелограммом Беннетта вне зависимости от того, какое звено зафиксировано.
2. Если в механизме Беннетта оба угла скрещивания осей шарниров находятся либо в одной квадранте, либо в накрест лежащих квадрантах, то такой механизм будет являться антипараллелограммом Беннетта.
3. Если в механизме Беннетта углы скрещивания осей шарниров находятся в смежных квадрантах, то зависимость вращения ведомого кривошипа относительно стойки при вращении ведущего кривошипа относительно стойки не меняется при фиксации другого звена.

### Заключение

В ходе работы выявлены 32 модификации механизма Беннетта в зависимости от ориентации осей шарниров его звеньев в различных квадрантах пространства. Для каждой модификации определен тип механизма (параллелограмм или антипараллелограмм Беннетта), а также зависимость вращения ведомого звена по отношению к ведущему.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 100 лет механизму Беннетта. Материалы международной конференции по теории механизмов и машин / Под ред. профессоров А.Г. Мудрова и М.Г. Яруллина. – Казань: РИЦ «Школа», 2004. – 292 с.



2. Дворников Л. Т. Нетрадиционные рассуждения о существовании механизма Беннетта / Теория механизмов и машин. 2009. №1 (13). – С.5-10.
3. Мингазов М. Р., Яруллин М. Г. Анализ исследований пространственных механизмов с вращательными парами// Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т.1. Секция 1. Аналитическая механика. Казань, 12-16 июня 2012 г. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – с. 358-366.
4. Мингазов М. Р. Кинематика ведомого кривошипа пространственного четырехзвенного шарнирного механизма особой структуры// XXI Туполевские чтения (школа молодых ученых): Международная молодежная научная конференция, 19 – 21 ноября 2013 г.: сборник докладов. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2013. с. 214-218.
5. Мудров П.Г. Пространственные механизмы с вращательными парами. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 1976. – 264 с.
6. Мудров А. Г. Пространственные механизмы с особой структурой. – Казань: Школа, 2003. – 300 с.
7. Яруллин М. Г., Мингазов М. Р. Краткий анализ модификации механизмов Беннетта// Проблемы механики современных машин. Материалы V международной конференции. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2012. Т. 1. – с. 177-181.
8. Baker J. E. The Bennett linkage and its associated quadric surfaces // Mech. Mach. Theory. – 1988. – vol. 23. – p. 147-156.
9. Bennett G.T. A new mechanism // Engineering. – 1903. – vol. 76. – p.777-778.
10. Bennett G.T. The skew isograms mechanism // Proc. Lond. Math. Soc. 2s. – 1913. – vol. 13. – p. 151-173.

M.G.Yarullin, M.R.Mingazov

## **STRUCTURAL MODIFICATIONS SYNTHESIS OF BENNETT MECHANISM**

Kazan National Research Technical University  
named after A.N.Tupolev

### **Abstract**

The article presents 32 models of Bennett mechanism modifications depending on the orientation axes of his links in different quadrants of the space. Two types of mechanism identified – parallelogram and antiparallelogram of Bennett’s mechanism. Based on the results of the system analysis research

established that if Bennett mechanism angle crossing axis hinges are in adjacent quadrants, that such a mechanism would be a parallelogram Bennett regardless of which link fixed. If the corners of the crossing axis hinges are in one quadrant or in the criss cross of quadrants, that such a mechanism would be antiparallelogram of Bennett.

*Keywords:* spatial mechanisms, structure, mobility of mechanism, joint, revolute pair, skew axes, crank, rod.

## REFERENCES

- [1] 100 let mekhanizmy Bennetta. Materialy mezhdunarodnoi konferencii po teorii mekhanizmov i mashin / Pod red. Professorov A.G.Mudrova I M.G. Yarullina. – Kazan: RIC “Shkola”, 2004. – 292 c. (rus.)
- [2] Dvornikov L. T. Netradicionnye rassuzhdeniya o suchestvovanii mekhanizm Bennetta / Teoriya mekhanizmov I mashin. 2009. № 1 (13). – С.5-10. (rus.)
- [3] Mingazov M.R., Yarullin M.G. Analys issledovaniy prostranstvennykh mekhanizmov s vrachatelnyimi parami // Analyticheskaya mekhanika, ustoychivost I upravlenye: Trudy X Mezhdunarodnoy Chetaevskoy konferencii. T.1. Sekciya 1. Analyticheskaya mekhanika. Kazan: Isd-vo Kazan. Gos. Tech. Un-ta, 2012. – 358-366. (rus.)
- [4] Mingazov M.R. Kinematica vedomogo krivoshipa prostranstvennogo chetyrehzvennogo sharnirnogo mekhanizm osoboy struktury // XXI Tupolevskie chteniya (shkola molodyh uchenykh): Mezhdunarodnaya molodezhnaya nauchnaya konferenciya, 19-21 noyabra 2013 g.: sbornik dokladov. – Kazan: Isd-vo Kazan. gos. Tech. un-ta, 2013. С 214-218. (rus.)
- [5] Mudrov P.G. Prostranstvennyye mekhanizm s vrachatelnyimi parami. – Kazan: Isd-vo Kazanskogo gos. un-ta., 1976. – 264 c. (rus.)
- [6] Mudrov A.G. Prostranstvennyye mekhanizm s osoboi strukturoy. – Kazan: Shkola, 2003. – 300 c. (rus.)
- [7] Yarullin M.G., Mingazov M.R. Kratkii analys modofokacii mekhanizmov Bennetta // Problemy mekhaniki sovremennykh mashin. Materialy V mezhdunarodnoy konferencii. – Ulan-Ude: Isd-vo VSGUTU, 2012. T. 1. – c. 177-181 (rus.)
- [8] Baker J. E. The Bennett linkage and its associated quadric surfaces // Mech. Mach. Theory. – 1988. – vol. 23. – p. 147-156.
- [9] Bennett G.T. A new mechanism // Engineering. – 1903. – vol. 76. – p.777-778.
- [10] Bennett G.T. The skew isograms mechanism // Proc. Lond. Math. Soc. 2s. – 1913. – vol. 13. – p. 151-173.